Taal van de wiskunde 2

Uitwerkingen

Willem van Ravenstein

Voorwoord

Inhoudsopgave

Laatst bijgewerkt op donderdag 13 februari 2020

Hoofdstuk 2 – Bewijzen met volledige inductie

Opdracht 1

a. $3+6+9+\dots+90=\sum_{k=1}^{30} 3k$

b.

Schrijf een stukje uit!

$a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\dots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}+b^n=$

$a^nb^0+a^{n-1}b^1+a^{n-2}b^2+\dots+a^2b^{n-2}+a^1b^{n-1}+a^0b^n=\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k$

c. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\dots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$

Opdracht 2

a. $\sum_{k=1}^{4}\frac{2}{k}=\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}=2+1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=4\frac{1}{6}$

b. $\sum_{k=1}^{100} 2k-1=1+3+5+\dots+199=100^2=10.000$

c. $\sum_{k=1}^{10}\pi=10\pi$

Opdracht 3

Te bewijzen: $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2\left(n+1\right)^2$

Stap 1: neem $n=1$

$1^3=1$ en $\frac{1}{4}\cdot 1^2\left(1+1\right)^2=1$ Klopt voor $n=1$

Stap 2: neem $n+1$

$1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=\frac{1}{4}(n+1)^2\left((n+1)+1\right)^2$

$\frac{1}{4}n^2\left(n+1\right)^2+(n+1)^3=\frac{1}{4}(n+1)^2\left(n+2\right)^2$

$\frac{1}{4}(n+1)^2\left\{n^2+4\left(n+1\right)\right\}=\frac{1}{4}(n+1)^2\left(n+2\right)^2$

$\frac{1}{4}(n+1)^2\left\{n^2+4n+4\right\}=\frac{1}{4}(n+1)^2\left(n+2\right)^2$

$\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2=\frac{1}{4}(n+1)^2\left(n+2\right)^2$

Klopt!

Opdracht 4

Te bewijzen: $1+3+5+\ldots+2n-1=n^2$

Stap 1: neem $n=1$

$1=1$ en $1^2=1$ klopt voor $n=1$

Stap 2: neem $n+1$

$1+3+5+\ldots+2n-1+2(n+1)-1=\left(n+1\right)^2$

$n^2+2(n+1)-1=\left(n+1\right)^2$

$n^2+2n+2-1=\left(n+1\right)^2$

$n^2+2n+1=\left(n+1\right)^2$

Klopt!

Opdracht 5

Te bewijzen: $3^{2n+1}+2^{n-1}$ is deelbaar door 7

Stap 1: neem $n=1$

$3^{2\cdot 1+1}+2^{1-1}=3^3+1=28$ is deelbaar door 7. Klopt voor $n=1$.

Stap 2: neem $n+1$

$3^{2(n+1)+1}+2^{(n+1)-1}$ is deelbaar door 7

$3^{2n+3}+2^n$ is deelbaar door 7

$9\cdot 3^{2n+1}+2\cdot 2^{n-1}$ is deelbaar door 7

$7\cdot 3^{2n+1}+2\cdot 3^{2n+1}+2\cdot 2^{n-1}$ is deelbaar door 7

$7\cdot 3^{2n+1}+2\left(3^{2n+1}+2^{n-1}\right)$ is deelbaar door 7

Klopt!

Hoofdstuk 3 – Inleiding in de getaltheorie

Opdracht 1

<u>360</u>

$1 \cdot 360$

$2 \cdot 180$

$3 \cdot 120$

$4 \cdot 90$

$5 \cdot 72$

$6 \cdot 60$

$8 \cdot 45$

$9 \cdot 40$

$10 \cdot 36$

$12 \cdot 30$

$15 \cdot 24$

$18 \cdot 20$

De delers van 360: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180 en 360.

<u>1001</u>

$1 \cdot 1001$

$7 \cdot 143$

$11 \cdot 91$

$13 \cdot 77$

De delers van 1001: 1, 7, 11, 13, 77, 91, 143 en 1001.

<u>1024</u>

$1 \cdot 1024$

$2 \cdot 512$

$4 \cdot 256$

$8 \cdot 128$

$16 \cdot 64$

$32 \cdot 32$

De delers van 1024: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 en 1024.

<u>17</u>

$1 \cdot 17$

De delers van 17: 1 en 17.

Opdracht 2

a. 33 : 12 = 2 rest 9
b. 44 : 6 = 7 rest 2
c. 123 : 3 = 41 rest 0

Opdracht 3

- m = 35 en n = 15
  $35 = 2 \cdot 15 + 5$
  $15 = 3 \cdot 5 + 0$
- m = 100 en n = 36
  $100 = 2 \cdot 36 + 28$
  $36 = 1 \cdot 28 + 8$
  $28 = 3 \cdot 8 + 4$
  $8 = 2 \cdot 4 + 0$
- m = 31 en n = 4
  $31 = 7 \cdot 4 + 3$
  $4 = 1 \cdot 3 + 1$
  $3 = 3 \cdot 1 + 0$

Met het algoritme kan je de **grootste gemene deler** bepalen.

Opdracht 4

a. Ggd(40, 78) = 2 **niet** relatief priem
b. Ggd(256, 243) = 1, dus relatief priem
c. Ggd(100, 45) = 5, dus **niet** relatief priem
d. Ggd(6, 21) = 3, dus **niet** relatief priem
e. Ggd(1001, 1002) = 1 dus relatief priem
f. Ggd(44, 111111) = 11, dus **niet** relatief priem

Opdracht 5

10+21+14+74 = 119

119 mod 24 = 23

Aankomsttijd: 23 uur.

Opdracht 6

a. Is 1234 deelbaar door 9 ? 1+2+3+4=10 nee niet deelbaar door 9
b. Is 1238983898919838819999 deelbaar door 9 ? Nee.
c. Is 1234 × 8972 = 11072448 ? 1 (mod 9) · 8 (mod 9) = 0 (mod 9). Dat klopt niet.
d. En is 12345 × 54321 = 671492745 ? Nee, toch niet.
   De 'negenproef' geeft geen garantie als het goed is. Wel zekerheid als het fout is.

Opdracht 7

- Je moet 5 vermenigvuldigen met **2** om 3 (modulo 7) te krijgen.
- Je moet 4 vermenigvuldigen met 6 om 3 (modulo 7) te krijgen .

De vermenigvuldigingstabel van modulo 6.

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

- Bovengenoemde eigenschappen kloppen hier **niet** meer.
- Je moet 5 vermenigvuldigen met **3** om 3 (modulo 6) te krijgen.
- Je kunt geen getal vinden waarmee je 4 kan vermenigvuldigen om 3 (modulo 6) te krijgen.
- Je kunt bij modulo 6 niet altijd terug rekenen. 6 is geen priemgetal.

Opdracht 8

Bereken het Kgv van:

a. Kgv(12, 13)=156
b. Kgv(8, 20) = 40
c. Kgv(198, 201) = 13266

Opdracht 9

a. Waarom werkt de som van de cijfers bij deelbaarheid door 9?

   Voorbeeld!?
   Waarom is 1233 deelbaar door 9?
   Omdat 1+2+3+3=9 en dat is deelbaar door 9, dus is 1233 ook deelbaar door 9.
   1233 betekent
   $1\cdot1000 + 2\cdot100 + 3\cdot10 + 3\cdot1 = 1233$
   Reken modulo 9 dan staat er links: $1\cdot1 \pmod 9 + 2\cdot1 \pmod 9 + \ldots$
   En rechts staat 0 modulo 9…

b. Waarom werkt het algoritme voor de deelbaarheid door 11?

   1 mod 11 = 1
   10 mod 11 = -1
   100 mod 11 =1
   1000 mod 11 =- 1
   10000 mod 11 =1
   100.000 mod 11=-1
   Enz…

Opdracht 10

$768 = 2^8 \cdot 3$

$\text{Aantal delers} = 9\cdot2 = 18$

Opdracht 11

Noem dit getal G.

$\text{Omdat } 15 = 3\cdot5 \text{ geldt:}$

$G = p^2 \cdot q^4$

$\text{Neem } p = 3 \text{ en } q = 2$

$G = 144$

Hoofdstuk 4 – Bewijzen

Opdracht 1

a.
   $\text{Bij } n = 41$

   $41^2 + 41 + 41 \text{ is zeker deelbaar door } 41$

b. Ja… nee…☺

Opdracht 2

Onderzoeken of 355134965500794406147 deelbaar is door 2, 3, 5, 7, 11, 13, …. ☺
Of gebruik een algebra-programma:

- DERIVE: $\text{PRIME}(3906^6 + 1091) \to \text{TRUE}$

Opdracht 3

Als $a = n^2 - m^2$, $b = 2nm$ en $c = n^2 + m^2$

$a^2 + b^2 = c^2$

$\left(n^2 - m^2\right)^2 + (2nm)^2 = \left(n^2 + m^2\right)$

$n^4 - 2n^2m^2 + m^4 + 4n^2m^2 = n^4 + 2n^2m^2 + m^4$

$\cancel{n^4} - 2n^2m^2 + \cancel{m^4} + 4n^2m^2 = \cancel{n^4} + 2n^2m^2 + \cancel{m^4}$

$2n^2m^2 = 2n^2m^2$

Klopt!

Hoofdstuk 5 – De grafische rekenmachine

Opdracht 1

a. $\dfrac{3\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \dfrac{{}^{1}\cancel{3}\sqrt{6}\cdot \cancel{2}^{1}\cancel{\sqrt{2}}}{{}_{1}\cancel{2}\,\cancel{6}\,\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{6}$

b. Bij een breuk kan je teller en noemer delen door hetzelfde getal.

c. Vereenvoudig $\dfrac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{6\sqrt{2}} + \dfrac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3} + \dfrac{1}{3}$

Opdracht 2

De functie $f(x) = \dfrac{\sqrt{64 - x^2}}{8x}$ heeft als asymptoot x=0.

Opdracht 3

Hij gebruikt $3\cdot\log(x-1)$ in plaats van ${}^{3}\log(x-1)$

Hoofdstuk 7 – Verzamelingen

Opdracht 1

Wat staat hier?

a. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x + 6 = 2\} \rightarrow \{-4\}$

b. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \cdot 6 = 2\} \rightarrow \varnothing$

c. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = x\} \rightarrow \{0,1\}$

d. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\} \rightarrow \varnothing$

e. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{N}$ is een deelverzameling van $\mathbb{Z}$ is een deelverzameling van $\mathbb{Q}$ is een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is een deelverzameling van $\mathbb{C}$

Opdracht 2

Je kunt $\sqrt{2}$ niet schrijven als een breuk.
Zie verderop voor het bewijs.

Opdracht 3

a. $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N} \rightarrow$ waar

b. $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N} \rightarrow$ waar

c. $-4 \notin \mathbb{N} \rightarrow$ waar

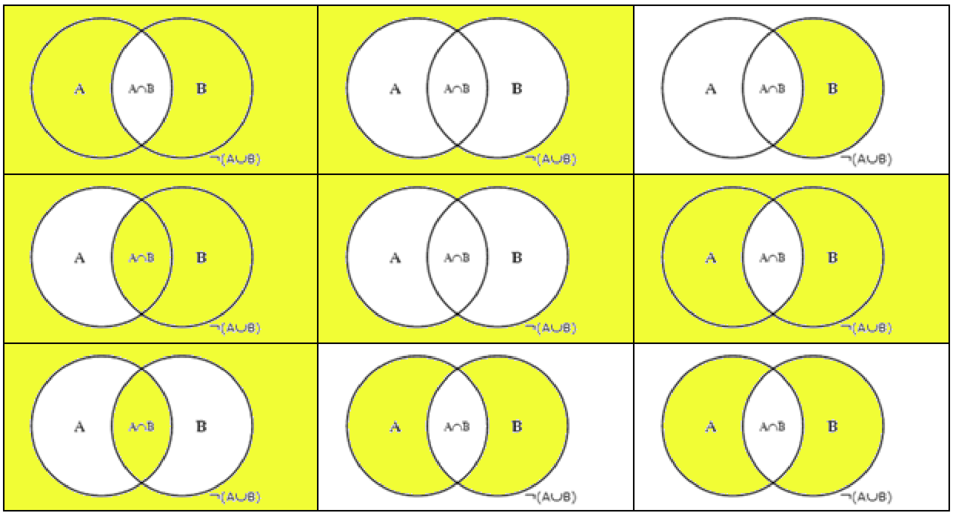
d. $\{0,1,2,3\} \cap \{3,6,9,12\} = 3 \rightarrow$ niet waar het moet $\{3\}$ zijn.

e. $\sqrt{207936} \in \mathbb{N} \rightarrow$ waar

f. $\varnothing \subset \mathbb{R} \rightarrow$ waar

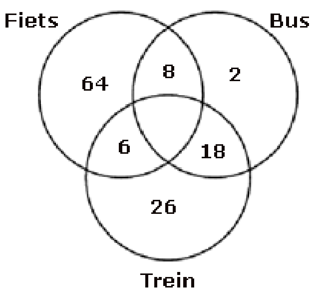
g. $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}' = \{0\} \rightarrow$ waar

Opdracht 4



Opdracht 5

a.



b. 64

Hoofdstuk 8 – Waarheidstabellen en omkeerbare stellingen

Opdracht 1

Toon aan: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

A	B	A en B	Niet A en B
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

A	B	Niet A	Niet B	Niet A of Niet B
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Opdracht 2

a. Is '$A \Rightarrow B$' hetzelfde als '$\neg A \Rightarrow \neg B$'?

Nee:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	niet A	niet B	niet A $\Rightarrow$ niet B
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

b. Is '$A \Rightarrow B$' hetzelfde als '$B \Rightarrow A$'?

Nee.

A	B	A=>B	$B \Rightarrow A$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

c. Is '$A \Rightarrow B$' hetzelfde als '$\neg B \Rightarrow \neg A$'?

Ja!

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	niet A	niet B	niet B $\Rightarrow$ niet A
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1

Opdracht 3

a. Nee, uit $x^2=9$ volgt $x=3$ of $x=-3$.
b. Nee, uit $ab>50$ volgt niet $a>10$ en $b>5$.
c. Nee, uit ($a=1$ en $b=2$) of ($a=2$ en $b=1$) volgt niet $a+b=3$ en $ab=2$.
   Ik kan net zo goed afleiden dat: $|a-b|=1$ en $a^b=a$
   Maar dat is heel iets anders dan dat er stond...

   Dus $(a+b=3) \wedge a\cdot b=2 \Rightarrow (a=1 \wedge b=2) \vee (a=2 \wedge b=1)$ klopt.
   Maar $(a=1 \wedge b=2) \vee (a=2 \wedge b=1) \Rightarrow (a+b=3) \wedge a\cdot b=2$ dat is **echt onzin**.

   Het gaat er dus **niet** om of bij '$A \Rightarrow B$' het 'mogelijk' **waar** zou kunnen zijn, maar of uit **A** ook 'echt' **B** volgt. Je kan dat **makkelijk controleren** als je er van uit gaat dat je alleen **A** weet. Had je dan zonder **B** te weten kunnen 'bedenken' wat er bij **B** staat? In dit geval gaat dat echt niet lukken denk ik...

Opdracht 4

a. Als je maar lui genoeg bent dan word je vanzelf een goed wiskundige? Nee dus.
b. Je kunt ook op andere manieren schade toebrengen aan je omgeving.
c. Een vierkant is wel altijd een ruit, maar een ruit is niet altijd een vierkant.

Opdracht 5

a. $A \Rightarrow B$ is waar (gegeven!)
b. Daar wordt niets over gezegd....
c. Je hebt dan **niet** opgelet.
d. Daar wordt niets over gezegd...

Opdracht 6

a. $\left((A \Rightarrow B) \wedge A\right) \Rightarrow B$ is waar
b. $\left((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\right) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ is waar
c. $\left((A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow B)\right) \Rightarrow \left((A \vee C) \Rightarrow B\right)$ is waar
d. $\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ is niet waar
e. $\left((A \wedge B) \Rightarrow C\right) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ is niet waar
f. $\left(A \wedge (B \vee C)\right) \Leftrightarrow \left((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\right)$ is waar

Hoofdstuk 9 – Logica, bewijzen en valkuilen

Opdracht 1

Niet waar. De ‘echte’ delers van 12 zijn 2, 3, 4 en 6 en dat is samen 15 en 15 is groter dan 12. De stelling klopt niet.

Opdracht 2

Neem twee getallen die 2 verschillen, bijvoorbeeld n en n+2.
Dan is $n(n+2)+1=n^2+2n+1=(n+1)^2$.
Dit laatste is een kwadraat.

Opdracht 3

Als ${}^{10}\log 3$ rationaal is dan:

${}^{10}\log 3 = \frac{p}{q}$ met p en q $(p, q \in \mathbb{N})$ waarbij de breuk niet verder kan worden vereenvoudigd.

$${}^{10}\log 3 = \frac{p}{q} \Rightarrow 10^{\frac{p}{q}} = 3 \Rightarrow 10^p = 3^q \Rightarrow (2 \cdot 5)^p = 3^q$$

Maar dat gaat niet lukken! (Waarom niet?)

Tegenspraak!

${}^{10}\log 3$ is irrationaal!

Opdracht 4

De rode en groene driehoek hebben helemaal niet dezelfde helling. Kijk maar naar de richtingscoëfficiënt. Het verschil is precies 1 hokje verdeeld over de hele lengte... Deze puzzel heeft ook iets te maken met de rij van Fibonacci.
Moraal: tekeningen kunnen misleidend zijn!

Opdracht 5

Als Klaas de waarheid spreekt, dan liegt Piet, maar dan spreekt Jan de waarheid en dat kan niet want als Klaas de waarheid spreekt dan liegen Piet en Jan beide.

Als Jan de waarheid spreekt dan liegt Piet. In dat geval spreekt Klaas de waarheid, maar dat kan niet want dan zou Jan moet liegen en we gingen er nu juist van uit dat Jan de waarheid sprak.

Als Piet de waarheid spreekt dan liegt Klaas. Dus Jan en Piet liegen niet allebei en dat klopt want Jan liegt en Piet spreekt de waarheid.

Conclusie: Piet spreekt de waarheid.

Moraal: dit is vanuit een oogpunt van formele logica lastig omdat er uitspraken gedaan worden over uitspraken... Zou je hier een tabel bij kunnen maken? Ik denk 't wel... maar soms is (een beetje gestructureerd) 'hypothese: opstellen, toetsen en (wel of niet) verwerpen' ook een goede methode.

Opdracht 6

Vouten schrijft je met een 'f' en de '2' is fout, want er zit maar één fout in de zin... o nee... dus toch twee... dus klopt het toch... of juist niet? Maar is het nu **waar of niet**...!?
't Is een voorbeeld van zelfverwijzing... en dat leidt tot een paradox.
Moraal: zelfverwijzing leidt makkelijk tot onverwarbare paradoxen... uitkijken!

Opdracht 7

Uit $(a-c)^2=(b-c)^2$ volgt niet noodzakelijk dat $a-c=b-c$.
Denk maar aan: $(-2)^2=2^2$ betekent niet dat $-2=2$.